Étude de la fonction de Weierstrass

Théorème : Soit $0 < a < 1$ et $b > 1$ tel que $ab > 1$. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k x)$$

est bien définie et est continue mais nulle part dérivable.

Lemme : Soit $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact inclus dans $]b^{-1}, b[$ telle que $v(1) = 1$, $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$. On note $c_k = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x) u(b^k(x-t))\mathrm{d}x$. Alors

(i) Il existe $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\hat{u} = v$.

(ii) Si f est dérivable en t, $b^{2j} c_j \underset{j \to +\infty}{\to} 0$.

Preuve du lemme : Le (i) vient du fait qu'une fonction test appartient à l'espace de Schwartz et la transformée de Fourier est bijective de cet espace dans lui-même. On ne va pas s'étendre sur ce point dans ce document.

Montrons le (ii). Comme f est dérivable en t elle admet un développement limité de la forme $f(x) = f(t) + (x-t)f'(t) + R(x-t)$ où $R(x-t) \underset{x \to t}{=} o(x-t)$. On peut alors reformuler c_k par linéarité de l'intégrale :

$$c_k = \int_{\mathbb{R}} f(t) u(b^k(x-t))\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} (x-t) f'(t) u(b^k(x-t))\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} R(x-t) u(b^k(x-t))\mathrm{d}x.$$

Pour le premier et le second terme on fait le changement de variable $s = b^k(x-t)$ ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) u(b^k(x-t))\mathrm{d}x = f(t) \int_{\mathbb{R}} u(s) \frac{\mathrm{d}s}{b^k} = \frac{f(t)\hat{u}(0)}{b^k} = 0 \text{ car } \hat{u} = v \text{ est à support dans }]b^{-1}, b[\text{ et}$$
$$\int_{\mathbb{R}} (x-t) f'(t) u(b^k(x-t))\mathrm{d}x = f'(t) \int_{\mathbb{R}} s u(s) \frac{\mathrm{d}s}{b^{2k}} = \frac{f'(t)\widehat{su}(0)}{b^{2k}} = \frac{f'(t) i \hat{u}'(0)}{b^{2k}} = 0 \text{ comme au dessus.}$$

Majorons maintenant le troisième terme grâce à ce que l'on sait. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition il existe $\delta > 0$ tel que $|x-t| \leq \delta \Rightarrow \left| \dfrac{R(x-t)}{x-t} \right| \leq \varepsilon$. Avec le même changement de variable qu'au dessus on trouve alors

$$\left| \int_{|x-t| \leq \delta} R(x-t) u(b^k(x-t))\mathrm{d}x \right| \leq \frac{\varepsilon}{b^{2k}} \int_{|s| \leq \delta b^k} |su(s)|\mathrm{d}s \leq \frac{\varepsilon}{b^{2k}} ||su||_{L^1},$$

la fonction su étant L^1 car dans Schwartz (qui est stable par multiplication par un polynôme). Pour le reste on utilise l'astuce suivante :

$$\left|\int_{|x-t|>\delta} R(x-t)u(b^k(x-t))\mathrm{d}x\right| \leq \int_{|x-t|>\delta} \left|\frac{R(x-t)}{(x-t)^3}\right| |(x-t)^3 u(b^k(x-t))|\mathrm{d}t.$$

On voit alors que $\dfrac{|R(x-t)|}{|x-t|^3} = \dfrac{|f(x)-f(t)-(x-t)f'(t)|}{|x-t|^3}$ et donc

$$\frac{|R(x-t)|}{|x-t|^3} \leq \frac{2||f||_\infty}{|x-t|^3} + \frac{||f'||_\infty}{|x-t|^2}.$$

Mais comme f est bornée, les deux membres de droite sont intégrables en $+\infty$ donc

$$\left|\int_{|x-t|>\delta} R(x-t)u(b^k(x-t))\mathrm{d}x\right| \leq \frac{||x^3 u||_\infty}{b^{3k}} \left|\left|\frac{R}{x}\right|\right|_{L^1} = \frac{C}{b^{3k}}.$$

On conclut alors la preuve du lemme car

$$b^{2k} c_k \leq \varepsilon ||su||_{L^1} + \frac{C}{b^k}. \square$$

Preuve du théorème : Avec les hypothèses la série définissant f converge absolument donc f est continue. Pour montrer qu'elle n'est pas dérivable en $t \in \mathbb{R}$ on va utiliser la contraposée du lemme. La convergence normale de la série va aussi nous permettre d'intervertir séries/intégrales et on se retrouve alors avec

$$\begin{aligned}
c_j &= \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \int_{\mathbb{R}} \cos(b^k x) u(b^j(x-t))\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ib^k x} + e^{-ib^k x}}{2} u(b^j(x-t))\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ib^k(\frac{s}{b^j}+t)}}{2b^j} u(s)\mathrm{d}s + a^k \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ib^k(\frac{s}{b^j}+t)}}{2b^j} u(s)\mathrm{d}s \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k e^{ib^k t}}{2b^j} \int_{\mathbb{R}} e^{ib^k \frac{s}{b^j}} u(s)\mathrm{d}s + \frac{a^k e^{-ib^k t}}{2b^j} \int_{\mathbb{R}} e^{-ib^k \frac{s}{b^j}} u(s)\mathrm{d}s \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k e^{ib^k t}}{2b^j} \hat{u}(-b^{k-j}) + \frac{a^k e^{-ib^k t}}{2b^j} \hat{u}(b^{k-j})
\end{aligned}$$

On remarque alors que $\hat{u}(-b^{k-j}) = 0$ et $\hat{u}(b^{k-j}) \neq 0$ ssi $k = j$ donc $b^{2j} c_j = \dfrac{(ab)^j e^{-b^j t}}{2}$ qui ne peut pas tendre vers 0 car $ab > 1$ par hypothèse. Donc par contraposée du lemme précédent, f n'est pas dérivable en t. $\square$

Remarques importantes :

- On utilise l'espace de Schwartz, prévoyez que l'on vous pose des questions (plutôt élémentaires quand même) dessus ! Il faut bien connaître les définitions et les propriétés de base.
- Le dev est assez technique, il faut bien l'avoir travaillé.
- On utilise des propriétés de la transformée de Fourier, ça me semble important de savoir les démontrer (dans Schwartz ce n'est pas très compliqué car on peut tout faire : dériver sous le signe intégrale etc.)
- On a fait une preuve constructiviste là mais le jury a l'air de bien aimer demander si on peut montrer l'existence de telles fonctions d'une autre manière et en général ils aiment bien que l'on invoque Baire (ne regardez pas si vous ne connaissez pas mais c'est un plus pour le jour j) pour dire que l'ensemble des fonctions continues mais nulle part dérivables forme un G_δ dense des fonctions continues.